图与树的基本概念

4627488
南京航空航天大学

关键词：图、邻接矩阵、邻接表、树、遍历算法

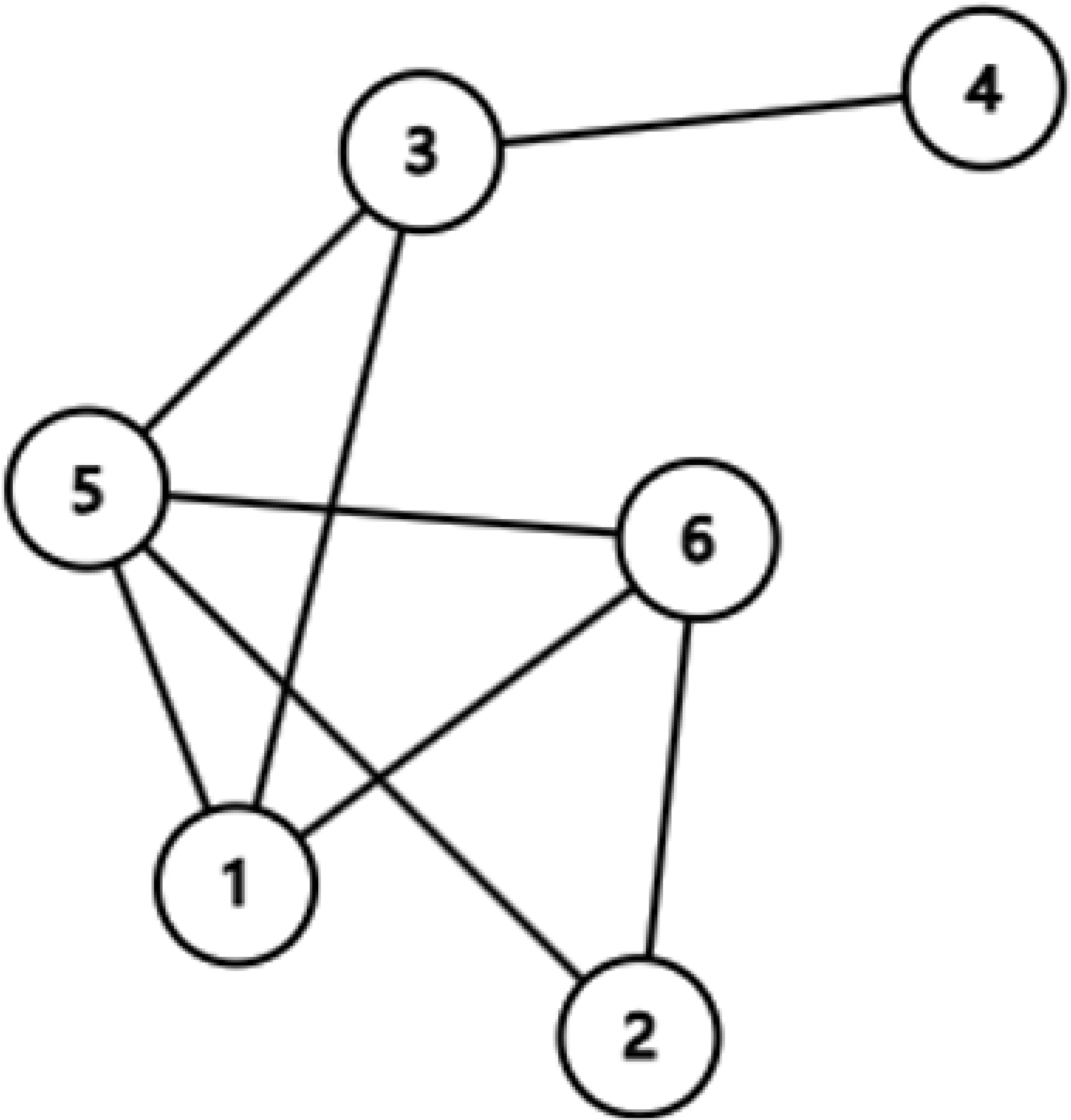
https://acm.starcstar.club/2025wcamp/day2/

图的基本概念

定义与组成

图 $G = (V, E)$，其中 V 是顶点集合，E 是边集合。

- 顶点（Vertex）：图中的节点。
- 边（Edge）：顶点间的连接关系。



图的分类

类型	特点	例子
无向图	边无方向，$(u, v) = (v, u)$	社交网络好友关系
有向图	边有方向，$u \to v \neq v \to u$	网页超链接关系

若 G 的每条边 $e_k = (u_k, v_k)$ 都被赋予一个数作为该边的 **权**，则称 G 为 **赋权图**。如果这些权都是正实数，就称 G 为 **正权图**。

形象地说，图是由若干点以及连接点与点的边构成的。

度（Degree）

- 无向图：顶点连接的边数。
- 有向图：入度（指向顶点的边数）、出度（顶点指向外部的边数）。

路径与环路（Path & Cycle）

- 途径 (walk)：途径是连接一连串顶点的边的序列，可以为有限或无限长度。
- 路径（path）：顶点序列 $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k$，相邻顶点间有边。
- 简单路径（simple path）：没有重复顶点的路径。
- 环路/圈（cycle）：起点和终点相同的路径（如 $v_1 \to v_2 \to v_1$）。
- 自环：起点和终点相同的边（如 (v_1, v_1)）。
- 重边：连接同一顶点的多条边（如 (v_1, v_2) 和 (v_1, v_2)）。

> 在无向图中 (u, v) 和 (v, u) 算一组重边，而在有向图中，$u \to v$ 和 $v \to u$ 不为重边。
> 在题目中，如果没有特殊说明，是可以存在自环和重边的，在做题时需特殊考虑。

连通性

- 连通图：任意两顶点间存在**路径**（无向图）。
- 强连通图：任意两顶点双向可达（有向图）。
- 连通分量：无向图的极大连通子图（子图后面会讲）。

子图

无向图

- 定义：$G' = (V', E')$ 是 $G = (V, E)$ 的子图，当且仅当 $V' \subseteq V$ 且 $E' \subseteq E$。
- 若对 $H \subseteq G$，满足 $\forall u, v \in V'$，只要 $(u, v) \in E$，均有 $(u, v) \in E'$，则称 H 是 G 的 **导出子图/诱导子图 (induced subgraph)**。

有向图

- 定义：$G' = (V', E')$ 是 $G = (V, E)$ 的子图，当且仅当 $V' \subseteq V$ 且 $E' \subseteq E$。
- 若对 $H \subseteq G$，满足 $\forall u, v \in V'$，只要 $u \to v \in E$，均有 $u \to v \in E'$，则称 H 是 G 的 **导出子图/诱导子图 (induced subgraph)**。

连通

- 无向图：对于一张无向图 $G=(V,E)$，对于 $u,v\in V$，若存在一条途径使得 $v_0=u, v_k=v$，则称 u 和 v 是 **连通的 (connected)**。由定义，任意一个顶点和自身连通，任意一条边的两个端点连通。
  若一张无向图的节点两两互相连通，则称这张图是 **连通的 (connected)**。
- 有向图：对于一张有向图 $G=(V,E)$，对于 $u,v\in V$，若存在一条途径使得 $v_0=u, v_k=v$，则称 u **可达** v。由定义，任意一个顶点可达自身，任意一条边的起点可达终点。（无向图中的连通也可以视作双向可达。）
  若一张有向图的节点两两互相可达，则称这张图是 **强连通的 (strongly connected)**。

图的应用场景

- 社交网络：无向图表示用户对称关系。
- 交通导航：权重图优化最短路径（Dijkstra算法）。
- 状态机建模：有向图描述系统状态转移（如JK触发器制作模20计数器）。

图的存储方式

1. 邻接矩阵

- 实现方式：
  - 二维数组 `matrix[u][v]` 表示顶点 u 和 v 的连接关系。
  - 权重图：`matrix[u][v]` 存储权重值，无边时标记为 0 或 ∞。
- 复杂度分析：

操作	时间复杂度	空间复杂度
查询边是否存在	$O(1)$	$O(V^2)$

- 适用场景：稠密图（边数接近顶点数平方）。

2. 邻接表

- 实现方式：
  - 每个顶点维护一个链表/数组，存储其所有邻接顶点。
  - 权重图：存储邻接顶点及权重（如 `(v, weight)`）。
- 复杂度分析：

操作	时间复杂度	空间复杂度
遍历某顶点的邻接点	$O(d)$（d 为度）	$O(V+E)$

- 适用场景：稀疏图（边数远小于顶点数平方）。

```
adj = [
    [(1, 2), (2, 3)],  # 0
    [(0, 2), (2, 4)],  # 1
    [(0, 3), (1, 4)]   # 2
]
```

存储方式对比

特性	邻接矩阵	邻接表
空间效率	低（稠密图适用）	高（稀疏图适用）
查询边效率	$O(1)$	$O(d)$
动态增删边效率	$O(1)$	$O(1)$（链表实现）
适用算法	Floyd-Warshall	DFS/BFS

1. 树的定义

一个没有固定根结点的树称为 **无根树**（unrooted tree）。无根树有几种等价的形式化定义：

- 有 n 个结点，$n-1$ 条边的连通无向图
- 无向无环的连通图
- 任意两个结点之间有且仅有一条简单路径的无向图
- 任何边均为桥的连通图
- 没有圈，且在任意不同两点间添加一条边之后所得图含唯一的一个圈的图

在无根树的基础上，指定一个结点称为 **根**，则形成一棵 **有根树**（rooted tree）。有根树在很多时候仍以无向图表示，

2. 树的结构分类

- 根树（Rooted Tree）：
    - 层次结构：根节点、父节点、子节点。
    - 示例：文件系统目录树。
- 二叉树（Binary Tree）：
    - 每个节点最多有两个子节点（左子节点、右子节点）。
    - 特殊类型：
        - 满二叉树：所有非叶节点均有2个子节点。
        - 完全二叉树：除最后一层外，其他层节点全满。

有关树的定义

适用于无根树和有根树

- **森林（forest）**：每个连通分量（连通块）都是树的图。按照定义，一棵树也是森林。
- **生成树（spanning tree）**：一个连通无向图的生成子图，同时要求是树。也即在图的边集中选择 $n-1$ 条，将所有顶点连通。
- **无根树的叶结点（leaf node）**：度数不超过 1 的结点。（考虑 $n=1$。）
- **有根树的叶结点（leaf node）**：没有子结点的结点。

只适用于有根树

- **父亲（parent node）**： 对于除根以外的每个结点，定义为从该结点到根路径上的第二个结点。
  根结点没有父结点。
- **祖先（ancestor）**： 一个结点到根结点的路径上，除了它本身外的结点。
  根结点的祖先集合为空。
- **子结点（child node）**： 如果 u 是 v 的父亲，那么 v 是 u 的子结点。
  子结点的顺序一般不加以区分，二叉树是一个例外。
- **结点的深度（depth）**： 到根结点的路径上的边数。
- **树的高度（height）**： 所有结点的深度的最大值。
- **兄弟（sibling）**： 同一个父亲的多个子结点互为兄弟。
- **后代（descendant）**： 子结点和子结点的后代。或者理解成：如果 u 是 v 的祖先，那么 v 是 u 的后代。

树的遍历算法

深度优先遍历（DFS）

递归实现模板（以二叉树为例）：

```
void dfs(TreeNode* node) {
    if (node == nullptr) return;
    // 前序遍历
    cout << node->val << endl;
    dfs(node->left);
    dfs(node->right);
}
```

应用场景:

- 前序：克隆树结构、序列化。
- 中序：二叉搜索树（BST）升序输出。
- 后序：释放树内存（先处理子节点）。

广度优先遍历（BFS）

队列辅助实现

```cpp
#include <queue>
using namespace std;

void bfs(TreeNode* root) {
    queue<TreeNode*> q;
    q.push(root);
    while (!q.empty()) {
        TreeNode* node = q.front();
        q.pop();
        cout << node->val << endl;
        if (node->left) q.push(node->left);
        if (node->right) q.push(node->right);
    }
}
```

应用场景：最短路径问题、社交网络好友推荐。

遍历结果对比

遍历方式	输出顺序（例子：根1，左2，右3）
前序	$1 \to 2 \to 3$
中序	$2 \to 1 \to 3$
后序	$2 \to 3 \to 1$
层次	$1 \to 2 \to 3$

一种新的二叉树非递归遍历方法

- https://mp.weixin.qq.com/s/FyInwZApXYkr2FPMZm2QhQ

递归函数转非递归的一般方法

1. 找到函数的所有局部变量 S（包括参数）
2. 用一个变量 `PC` 表示函数内应执行的下一条语句
3. 使用栈存储 S 和 `PC`
4. 每次根据栈顶信息执行指令，并更新 S 和 `PC` 及进行入栈（函数调用）和出栈（函数结束）操作

总结

1. 图与树的关系：树是连通无环图，森林是多棵树。
2. 存储方式：稠密图用邻接矩阵，稀疏图用邻接表。
3. 树遍历的核心逻辑：DFS递归 / BFS队列。

思考题

- 如何判断图是否为树?
    i. 检查是否连通（通过DFS/BFS遍历所有顶点）。
    ii. 验证边数是否满足 $|E| = |V| - 1$。

扩展阅读

- 《算法导论》第20章：基本图算法
- 《算法竞赛进阶指南》第4章：图论算法
- LeetCode 树专题